4. Доказати да рјешење Кошијевог задатка

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t)$$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0$$

на скупу $\Omega = \{(x,t) \mid x \in R, t \geq 0\}$ задовољава

а) $u(0,t) = 0,\ t > 0$, ако је функција $f(x,t)$ непарна по x.

б) $u_x(0,t) = 0,\ t > 0$, ако је функција $f(x,t)$ парна по x.

Рјешење:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-at+a\theta}^{x+at-a\theta} f(w,\theta)\, dw\, d\theta$$

$$u_x(x,t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \left(f(x+at-a\theta,\theta) - f(x-at+a\theta,\theta) \right) d\theta$$

а) $$u(0,t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{-(at-a\theta)}^{at-a\theta} f(w,\theta)\, dw\, d\theta = \frac{1}{2a} \int_0^t 0\, d\theta = 0$$

б) $$u_x(0,t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \left(f(at-a\theta,\theta) - f(-(at-a\theta),\theta) \right) d\theta = \frac{1}{2a} \int_0^t \left(f(at-a\theta,\theta) - f(at-a\theta,\theta) \right) d\theta =$$

$$= \frac{1}{2a} \int_0^t 0\, d\theta = 0$$

5. Ријешити:

a) $u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t)$, $\Omega=\{(x,t)\,|\,x>0, t>0\}$

$u(x,0)=u_t(x,0)=0$, $x>0$

$u(0,t)=0$, $t>0$

Рјешење:

Као у задатку 3., како би примијенили Даламберову формулу морамо продужити функцију $f(x,t)$ на $\Omega=\{(x,t)\,|\,x\in\mathbb{R}, t>0\}$. Због услова $u(0,t)=0$, $t>0$, функцију f морамо продужити непарно по x. Дакле, рјешавамо проблем

$$\vartheta_{tt}=a^2\vartheta_{xx}+F(x,t),\quad \Omega=\{(x,t)\,|\,x\in\mathbb{R}, t>0\}$$

$$\vartheta(x,0)=\vartheta_t(x,0)=0,\quad x\in\mathbb{R}$$

$$F(x,t)=\begin{cases} f(x,t), & x>0\\ -f(-x,t), & x<0\end{cases}$$

Рјешење овог проблема је задато са

$$\vartheta(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-at+a\theta}^{x+at-a\theta}F(w,\theta)\,dw\,d\theta$$

1) $x-at\geq 0$, $\frac{x}{a}\geq t$

$$\vartheta(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-at+a\theta}^{x+at-a\theta}f(w,\theta)\,dw\,d\theta$$

2) $x-at<0$, $x+at\geq 0$, $-t\leq\frac{x}{a}<t$

$$\vartheta(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^{t-\frac{x}{a}}\int_{-x+at-a\theta}^{x+at-a\theta}f(w,\theta)\,dw\,d\theta+\frac{1}{2a}\int_{t-\frac{x}{a}}^{t}\int_{x-at+a\theta}^{x+at-a\theta}f(w,\theta)\,dw\,d\theta$$

3) $\cancel{a}x+at<0$, $\frac{x}{a}<-t$

$$\vartheta(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{-x-at+a\theta}^{-x-at+a\theta}f(w,\theta)\,d\cancel{\theta}w\,d\theta$$

Рјешење нашег почетног задатка је рестрикција υ на $\Omega=\{(x,t)\mid x>0, t>0\}$, односно:

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^t\int_{x-at+a\theta}^{x+at-a\theta} f(w,\theta)\,dw\,d\theta, & \dfrac{x}{a}\geq t\\[2ex] \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^{t-\frac{x}{a}}\int_{-x+at-a\theta}^{x+at-a\theta} f(w,\theta)\,dw\,d\theta+\dfrac{1}{2a}\int_{t-\frac{x}{a}}^{t}\int_{x-at+a\theta}^{x+at-a\theta} f(w,\theta)\,dw\,d\theta, & 0<\dfrac{x}{a}\leq t\end{cases}$$

d) $u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t)$, $\Omega=\{(x,t)\mid x>0, t>0\}$

$u(x,0)=u_t(x,0)=0$, $x>0$

$u(0,t)=0$, $t>0$

Рјешење:

Како би услов $u_x(0,t)=0$, $t>0$ био испуњен, продужићемо функцију $f(x,t)$ парно по x на $\Omega=\{(x,t)\mid x\in\mathbb{R}, t>0\}$.

Рјешавамо проблем

$$\upsilon_{tt}=a^2\upsilon_{xx}+F(x,t),\quad \Omega=\{(x,t)\mid x\in\mathbb{R}, t>0\}$$

$$\upsilon(x,0)=\upsilon_t(x,0)=0,\quad x\in\mathbb{R}$$

$$F(x,t)=\begin{cases}f(x,t), & x>0\\ f(-x,t), & x<0\end{cases}$$

Рјешење овог проблема је

$$\upsilon(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-at+a\theta}^{x+at-a\theta} F(w,\theta)\,dw\,d\theta$$

1) $x-at\geq 0$, $\frac{x}{a}\geq t$

$$\upsilon(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-at+a\theta}^{x+at-a\theta} f(w,\theta)\,dw\,d\theta$$

2) $x-at<0, x+at\geq 0$, $-t\leq\frac{x}{a}<t$

$$\upsilon(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^{t-\frac{x}{a}}\left(\int_0^{-x+at-a\theta} f(w,\theta)\,dw+\int_0^{x+at-a\theta} f(w,\theta)\,dw\right)d\theta+$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{t-\frac{x}{a}}^{t}\int_{x-at+a\theta}^{x+at-a\theta} f(w,\theta)\,dw\,d\theta$$

3) $x+at<0$, $\frac{x}{a}<-t$

$$v(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{-x-at+a\theta}^{-x+at-a\theta} f(w,\theta)\,dw\,d\theta$$

Рјешење наше почетне проблема је рестрикција v на $\Omega=\{(x,t)\mid x>0\ ,\ t>0\}$, односно

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^t\int_{x-at+a\theta}^{x+at-a\theta} f(w,\theta)\,dw\,d\theta\ , & \dfrac{x}{a}\geq t\\[2ex] \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^{t-\frac{x}{a}}\left(\int_0^{-x+at-a\theta} f(w,\theta)\,dw+\int_0^{x+at-a\theta} f(w,\theta)\,dw\right)d\theta\ + & \\ \quad +\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{t-\frac{x}{a}}^{t}\int_{x-at+a\theta}^{x+at-a\theta} f(w,\theta)\,dw\,d\theta\ , & 0\leq\dfrac{x}{a}<t\end{cases}$$

V вјежбе

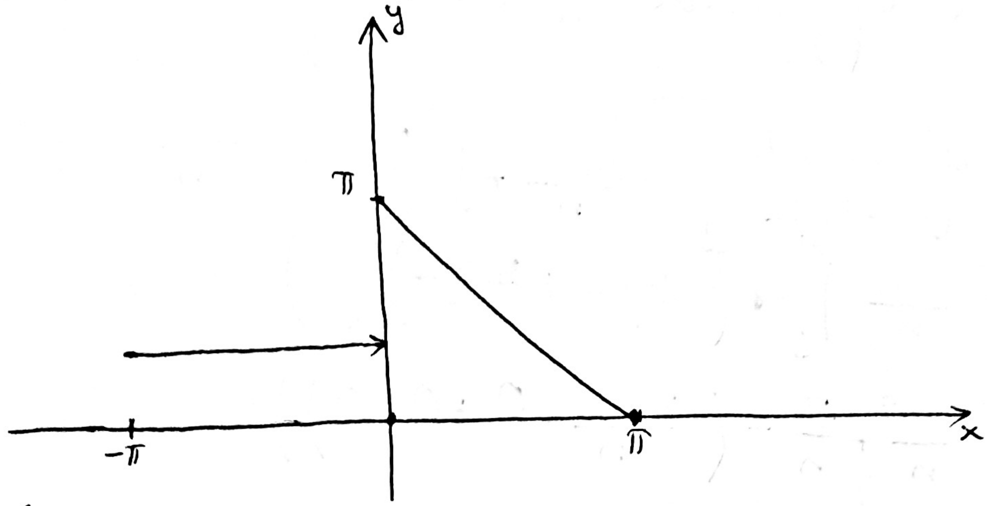
Парцијалне диференцијалне једначине

Фуријеови редови

1. Развити у Фуријеов ред функцију
$$f(x)=\begin{cases}1, & -\pi\le x<0\\ \pi-x, & 0\le x\le\pi\end{cases}$$
и израчунати $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

Рјешење:

График задате функције је



Функцију f продужићемо периодично на $\mathbb{R}$. За продужење функције f ће бити испуњени Дирихлеови услови, па се она може развити у Фуријеов ред. Како се на сегменту $[-\pi,\pi]$ функција f поклапа са својим продужењем, добијени Фуријеов ред ће бити Фуријеов развод функције f на $[-\pi,\pi]$. Означићемо добијени Фуријеов ред са F.

$$F(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}dx+\int_{0}^{\pi}(\pi-x)dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(x\Big|_{-\pi}^{0}+\left(\pi x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(0-(-\pi)+\pi^2-\frac{\pi^2}{2}-\left(0-\frac{0^2}{2}\right)\right)=1+\frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi}(\pi-x)\cos nx\,dx\right) = *$$

$$\left[\int x\cos nx\,dx = \begin{bmatrix} u=x & dv=\cos nx\,dx \\ du=dx & v=\frac{\sin nx}{n}\end{bmatrix} = \frac{x\sin nx}{n} - \frac{1}{n}\int \sin nx\,dx = \frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} + c\right]$$

$$* = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0} + \pi\frac{\sin nx}{n}\Big|_{0}^{\pi} - \left(\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right)\Big|_{0}^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(0-0+\pi(0-0) - \left(0 + \frac{\cos n\pi}{n^2} - 0 - \frac{\cos 0}{n^2}\right)\right) = \frac{-1}{\pi}\,\frac{(-1)^n-1}{n^2}$$

за $n=2k$, $a_n = 0$

за $n=2k-1$, $a_n = \frac{2}{\pi n^2}$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi}(\pi-x)\sin nx\,dx\right) = *$$

$$\left[\int x\sin nx\,dx = \begin{bmatrix} u=x & dv=\sin nx\,dx \\ du=dx & v=-\frac{\cos nx}{n}\end{bmatrix} = -\frac{x\cos nx}{n} + \frac{1}{n}\int \cos nx\,dx = -\frac{x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} + c\right]$$

$$* = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0} - \pi\frac{\cos nx}{n}\Big|_{0}^{\pi} - \left(-\frac{x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right)\Big|_{0}^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n} - \frac{\pi(-1)^n}{n} + \frac{\pi}{n} - \left(-\frac{\pi(-1)^n}{n} + 0 + 0 - 0\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\,\frac{\pi - 1 + (-1)^n}{n}$$

за $n=2k$, $b_n = \frac{1}{n}$

за $n=2k-1$, $b_n = \frac{\pi-2}{n\pi}$

Дакле,

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\cos nx + \frac{\pi-1+(-1)^n}{n\pi}\sin nx\right)$$

Одавде је $F(0) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(2k-1)^2}$

Пошто функција f има прекид у тачки 0, то је

$$F(0) = \frac{f_+(0) + f_-(0)}{2} = \frac{\pi+1}{2}$$

Дакле,

$$\frac{\pi+1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$$

$$\frac{\pi}{4}=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$$

Добијамо:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

2. Израчунати $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Рјешење:

Нека је $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=a$. Тада је

$$a=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{k^2}+\frac{\pi^2}{8}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}+\frac{\pi^2}{8}$$

Дакле,

$$a=\frac{1}{4}a+\frac{\pi^2}{8}$$

$$\frac{3}{4}a=\frac{\pi^2}{8}$$

$$a=\frac{\pi^2}{6}$$

Добили смо

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

3. Функцију

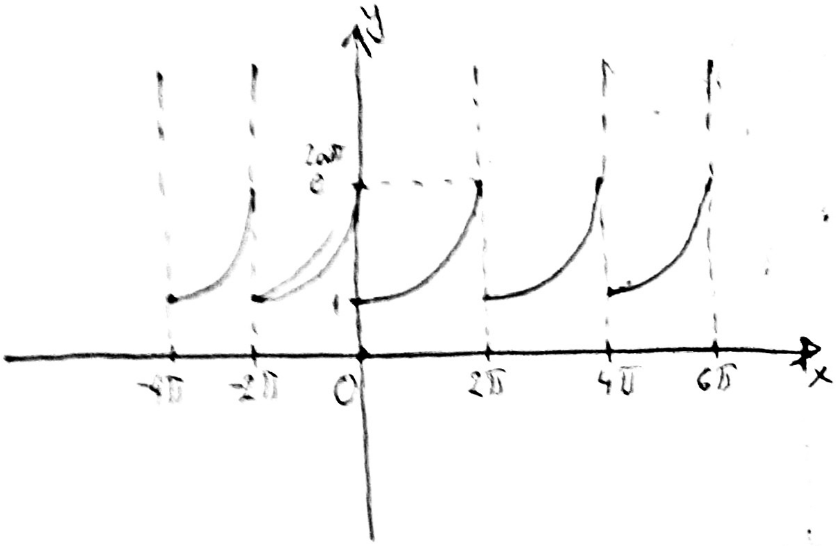
$$f(x)=e^{ax},\ a>0$$

развити у Фуријеов ред на $[0,2\pi]$ и израчунати

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^2+n^2}.$$

Рјешење:

Продужићемо функцију f периодично на $\mathbb{R}$.



Продужење функције f задовољава Дирихлеове услове, па се може развити у Фуријев ред. Како се f и продужење f поклапају на $[0,2\pi]$, добијени Фуријев ред ће бити и Фуријев развој функције f на $[0,2\pi]$. Означимо тај Фуријев ред са F.

$$F(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right), \quad l=\frac{2\pi-0}{2}=\pi$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}e^{ax}dx=\frac{1}{\pi}\frac{e^{ax}}{a}\Big|_0^{2\pi}=\frac{e^{2a\pi}-1}{a\pi}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}e^{ax}\cos nx\,dx=*$$

$$I=\int e^{ax}\cos nx\,dx \left[\begin{matrix} e^{ax}=u, & \cos nx\,dx=d\vartheta \\ ae^{ax}dx=du, & \frac{\sin nx}{n}=\vartheta \end{matrix}\right]=\frac{e^{ax}\sin nx}{n}-\frac{a}{n}\int e^{ax}\sin nx\,dx=$$

$$=\left[\begin{matrix} e^{ax}=u, & \sin nx\,dx=d\vartheta \\ ae^{ax}dx=du, & -\frac{\cos nx}{n}=\vartheta \end{matrix}\right]=\frac{e^{ax}\sin nx}{n}-\frac{a}{n}\left(-\frac{e^{ax}\cos nx}{n}+\frac{a}{n}\int e^{ax}\cos nx\,dx\right)=$$

$$=\frac{e^{ax}\sin nx}{n}+\frac{ae^{ax}\cos nx}{n^2}-\frac{a^2}{n^2}I$$

$$I+\frac{a^2}{n^2}I=e^{ax}\frac{n\sin nx+a\cos nx}{n^2}$$

$$\frac{n^2+a^2}{n^2}I=e^{ax}\frac{n\sin nx+a\cos nx}{\cancel{n^2}}$$

$$I=e^{ax}\frac{n\sin nx+a\cos nx}{n^2+a^2}$$

$$*=\frac{1}{\pi}\left(e^{ax}\frac{n\sin nx+a\cos nx}{n^2+a^2}\right)\Big|_0^{2\pi}=\frac{1}{\pi}\left(e^{2a\pi}\frac{a}{n^2+a^2}-1\cdot\frac{a}{n^2+a^2}\right)=\frac{a}{\pi(n^2+a^2)}\left(e^{2a\pi}-1\right)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{ax}\sin nx\,dx = *$$

$$\int e^{ax}\sin nx\,dx = \left(I - \frac{e^{ax}\sin nx}{n}\right)\left(\frac{-n}{a}\right) = \left(e^{ax}\,\frac{n\sin nx + a\cos nx}{n^2+a^2} + e^{ax}\,\frac{\sin nx}{n}\right)\cdot\frac{1}{a} =$$

$$= \frac{\cancel{-n^2\sin nx} - an\cos nx + \cancel{n^2\sin nx} + a^2\sin nx}{\cancel{n}(n^2+a^2)}\cdot e^{ax}\cdot\frac{1}{a} = e^{ax}\,\frac{a\sin nx - n\cos nx}{n^2+a^2}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(e^{ax}\,\frac{a\sin nx - n\cos nx}{n^2+a^2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi}\left(e^{2a\pi}\,\frac{-n}{n^2+a^2} - 1\cdot\frac{-n}{n^2+a^2}\right) = \frac{-n}{\pi(n^2+a^2)}\left(e^{2a\pi}-1\right)$$

$$F(x) = \frac{e^{2a\pi}-1}{2a\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{\pi(n^2+a^2)}\left(e^{2a\pi}-1\right)\cos nx - \frac{n}{\pi(n^2+a^2)}\left(e^{2a\pi}-1\right)\sin nx\right)$$

Одавде је

$$F(0) = \frac{e^{2a\pi}-1}{2a\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\left(e^{2a\pi}-1\right)}{\pi(n^2+a^2)}$$

Како продужење функције f има прекид у 0, то је

$$F(0) = \frac{f_+(0)+f_-(0)}{2} = \frac{e^{2a\pi}+1}{2}$$

Дакле

$$\frac{e^{2a\pi}+1}{2} = \frac{e^{2a\pi}-1}{2a\pi} + \frac{a\left(e^{2a\pi}-1\right)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^2+n^2} \qquad \Big/\cdot\ \frac{\pi}{a\left(e^{2a\pi}-1\right)}$$

$$\frac{\pi\left(e^{2a\pi}+1\right)}{2a\left(e^{2a\pi}-1\right)} = \frac{1}{a^2\left(e^{2a\pi}-1\right)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^2+n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^2+n^2} = \frac{a\pi\left(e^{2a\pi}+1\right)-2}{2a^2\left(e^{2a\pi}-1\right)}$$

4. Функцију

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2-x, & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

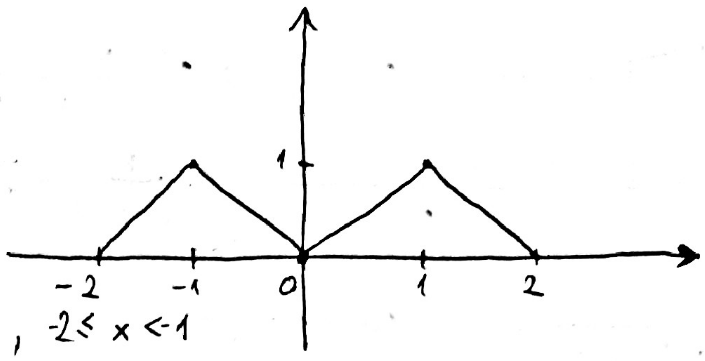
развити у Фуријеов ред на $[0,2]$ по:

а) косинусима

б) синусима

Решење:

а) Функцију f треба развити по косинусима, па је морало продужити парно на $[-2,2]$.



$$g(x)=\begin{cases} 2+x, & -2\leq x<-1 \\ -x, & -1\leq x<0 \\ x, & 0\leq x\leq 1 \\ 2-x, & 1<x\leq 2 \end{cases}$$

Функцију g продужимо периодично на $\mathbb{R}$, и продужене функције g ће задовољавати Дирихлеове услове, па се може развити у Фуријеов ред. Како се функција g поклапа са својим продужењем на $[-2,2]$, добијени Фуријеов ред ће представљати Фуријеов развој функције g на $[-2,2]$.

Означимо тај Фуријеов ред са F.

$$F(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$l=\frac{2-(-2)}{2}=2$$

Како је функција g парна, то је $b_n=0,\ \forall n\in\mathbb{N}$.

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}g(x)dx=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\int_{0}^{2}f(x)dx=\int_0^1 x\,dx+\int_1^2(2-x)dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2=$$

$$=\frac{1^2}{2}-\frac{0}{2}+\left(4-\frac{4}{2}-2+\frac{1}{2}\right)=1$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} g(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\cdot 2\int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx=$$

$$=\int_0^1 x\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx+\int_1^2(2-x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx=$$

$$=\left(\frac{x\sin\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}+\frac{\cos\frac{n\pi x}{2}}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2}\right)\Bigg|_0^1+2\,\frac{\sin\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\Bigg|_1^2-\left(\frac{x\sin\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}+\frac{\cos\frac{n\pi x}{2}}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2}\right)\Bigg|_1^2=$$

$$=\cancel{\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}}+\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}-0-\frac{4}{n^2\pi^2}\cdot 1+0-\cancel{\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}}-\left(0+\frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi-\cancel{\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}}-\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}\right)=$$

$$=\frac{8}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{4}{n^2\pi^2}-\frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}$$

За $n=4k$, $a_n=0$

За $n=4k+1$, $a_n=0$

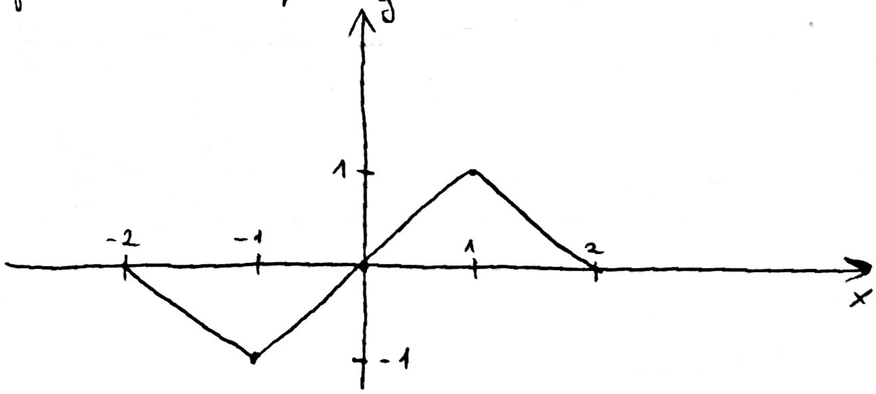
За $n=4k+2$, $a_n=\frac{-16}{n^2\pi^2}$

За $n=4k+3$, $a_n=0$

$$F(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{4}{n^2\pi^2}-\frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}\right)\cos\frac{n\pi x}{2}=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-16)}{(4k+3)^2\pi^2}\cos\left(\frac{(4k+3)\pi x}{2}\right)$$

Како се функције f и g поклапају на $[0,2]$, ово је и развој функције f на $[0,2]$.

б) Функцију f треба развити по синусима, па је морамо продужити непарно на $[-2,2]$.



$$g(x)=\begin{cases}-2-x, & -2\le x<-1\\ x, & -1\le x<0\\ x, & 0\le x\le 1\\ 2-x, & 1\le x\le 2\end{cases}$$

Функцију g продужимо периодично на $\mathbb{R}$. Добијено продужење задовољава Дирихлеове услове, па се може развити у Фуријеов ред. Функција g се поклапа са својим продужењем на $[-2,2]$, па ће добијени Фуријеов ред бити и Фуријеов развој функције g на $[-2,2]$.
Означимо тај Фуријеов ред са F.

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$l = \frac{2-(-2)}{2} = 2$$

Како је функција g непарна, то је $a_0 = a_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} g(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\cdot\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx =$$

$$= \int_0^1 x\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_1^2 (2-x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx =$$

$$= \left(\frac{-x\cos\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}} + \frac{\sin\frac{n\pi x}{2}}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2}\right)\Bigg|_0^1 + 2\left(\frac{-\cos\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\right)\Bigg|_1^2 - \left(\frac{-x\cos\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}} + \frac{\sin\frac{n\pi x}{2}}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2}\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \left(\frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} + 0 - 0\right) + 2\cdot\left(\frac{-2}{n\pi}\cos n\pi + \frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}\right) -$$

$$- \left(\frac{-4}{n\pi}\cos n\pi + 0 + \frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

За $n=2k$, $b_n = 0$

За $n=2k-1$, $b_n = \frac{8(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{n^2\pi^2}$

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{8(-1)^k}{(2k-1)^2\pi^2}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{2}$$

Како се функције f и g поклапају на $[0,2]$, добијени Фуријеов ред је и Фуријеов развој функције f на $[0,2]$