

4. Dоказати да посредством Канелевија сагадица

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t)$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$$

да скуп  $\Omega = \{(x, t) | x \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$  задовољава

a)  $u(0, t) = 0, t > 0$ , ако је функција  $f(x, t)$  непарна уo x.

б)  $u_x(0, t) = 0, t > 0$ , ако је функција  $f(x, t)$  парна уo x.

Посредством:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-at+a\vartheta}^{x+at-a\vartheta} f(w, \vartheta) dw d\vartheta$$

$$u_x(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t (f(x+at-a\vartheta) - f(x-at+a\vartheta, 0)) d\vartheta$$

$$\text{а)} u(0, t) = \frac{1}{2a} \int_{-(at-a\vartheta)}^{at-a\vartheta} \int_Q f(w, \vartheta) dw d\vartheta = \frac{1}{2a} \int_a^t 0 dt = 0$$

$$\text{б)} u_x(0, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t (f(at-a\vartheta) - f(-at+a\vartheta, 0)) d\vartheta = \frac{1}{2a} \int_0^t (f(at-a\vartheta, 0) - f(at-a\vartheta, 0)) d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{2a} \int_0^t 0 d\vartheta = 0$$

## 5. Решение:

a)  $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad \Omega = \{(x, t) | x > 0, t > 0\}$   
 $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad x > 0$   
 $u(0, t) = 0, \quad t > 0$

Решение:

Как в задаче 3., како да решиме уравнение Дуамберговы  
 с формулою Маттоа производнији функцији  $f(x, t)$  на  $\Omega = \{(x, t) | x \in \mathbb{R}, t > 0\}$   
 Задача има услов  $u(0, t) = 0, t > 0$ , симетрији  $f$  маттоа производнији  
 не зависи од  $x$ . Тако, решавамо уравнен

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + F(x, t), \quad \Omega = \{(x, t) | x \in \mathbb{R}, t > 0\}$$

$$U(x, 0) = U_t(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$F(x, t) = \begin{cases} f(x, t), & x > 0 \\ -f(-x, t), & x < 0 \end{cases}$$

Решение чији је засновано на

$$U(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-at+a0}^{x+at-a0} F(w, \vartheta) dw d\vartheta$$

1)  $x-at \geq 0, \quad \frac{x}{a} \geq t$

$$U(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-at+a0}^{x+at-a0} f(w, \vartheta) dw d\vartheta$$

2)  $x-at < 0, \quad x+at \geq 0, \quad -t \leq \frac{x}{a} < t$

$$U(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^{t-\frac{x}{a}} \int_{-x+at-a0}^{x+at-a0} f(w, \vartheta) dw d\vartheta + \frac{1}{2a} \int_{t-\frac{x}{a}}^t \int_{x-at+a0}^{x+at-a0} f(w, \vartheta) dw d\vartheta$$

3)  $x+at < 0, \quad \frac{x}{a} < -t$

$$U(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^{-x-at+a0} \int_{-x+at-a0}^{x+at-a0} f(w, \vartheta) dw d\vartheta$$

Примере највећи интерес је посматрања  $\Omega$  на

$$\Omega = \{(x, t) \mid x > 0, t > 0\}$$

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2a} \int_{t-x}^{t+x} f(w, 0) dw d\omega, & \frac{x}{a} \geq t \\ \frac{1}{2a} \int_0^{\frac{x}{a}} f(w, 0) dw d\omega + \frac{1}{2a} \int_{t-\frac{x}{a}}^t \int_{x-a}^{x+a} f(w, 0) dw d\omega, & 0 < \frac{x}{a} \leq t \end{cases}$$

d)  $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t)$ ,  $\Omega = \{(x, t) \mid x > 0, t > 0\}$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, x > 0$$

$$u(0, t) = 0, t > 0$$

Примере:

Како је  $u_x(0, t) = 0, t > 0$  дао уочио, употребљавено  
спомену је  $f(x, t)$  само за  $x > 0$  а  $\Omega = \{(x, t) \mid x \in \mathbb{R}, t > 0\}$ .

Применимо употреби

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + F(x, t), \quad \Omega = \{(x, t) \mid x \in \mathbb{R}, t > 0\}$$

$$U(x, 0) = U_t(x, 0) = 0, x \in \mathbb{R}$$

$$F(x, t) = \begin{cases} f(x, t), & x > 0 \\ f(-x, t), & x < 0 \end{cases}$$

Примере са и подесна је

$$U(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a+t-w}^{x+a-t} f(w, 0) dw d\omega$$

1)  $x - at \geq 0, \frac{x}{a} \geq t$

$$U(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a+t-w}^{x+a-t} f(w, 0) dw d\omega$$

2)  $x - at < 0, x + at \geq 0, -t \leq \frac{x}{a} < t$

$$U(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \left( \int_0^{-\frac{x}{a}} f(w, 0) dw + \int_{x-a+t}^{x+a-t} f(w, 0) dw \right) d\omega +$$

$$+ \frac{1}{2a} \int_{t-\frac{x}{a}}^t \int_{x-a+t-w}^{x+a-t} f(w, 0) dw d\omega$$

$$3) \quad x-tat < 0, \quad x < t$$

$$v(x,t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-tat}^{x-tat-a\theta} f(x,\theta) dx d\theta$$

Причина: замена координат введена для решения уравнения вида

$$\Omega = \{(x,t) \mid x > 0, t > 0\}, \text{ огнночно}$$

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-tat+a\theta}^{x-tat-a\theta} f(x,\theta) dx d\theta, & \frac{x}{a} \geq t \\ \frac{1}{2a} \left( \int_0^{\frac{t-x}{a}} \int_0^{-x+tat-a\theta} f(x,\theta) dx d\theta + \int_0^{x-tat+a\theta} f(x,\theta) dx d\theta \right) d\theta + \\ + \frac{1}{2a} \int_{t-\frac{x}{a}}^t \int_{x-tat+a\theta}^{x-tat-a\theta} f(x,\theta) dx d\theta, & 0 \leq \frac{x}{a} < t \end{cases}$$

V Лекције

Наредујуће супретну усавијајују  
је гравијујују

Фурјејеви редови

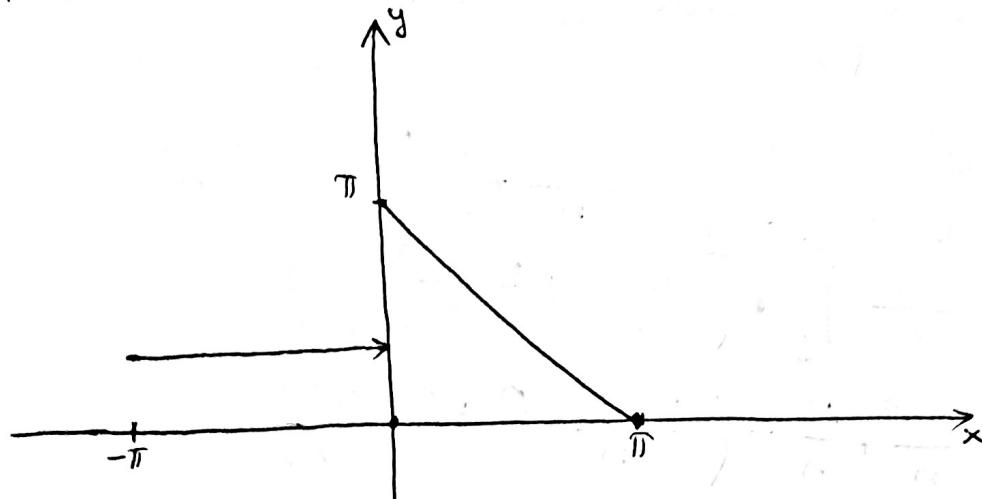
1. Развојем  $y$  Фурјејев рег. обухватају

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \leq x < 0 \\ \pi - x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

и израчунати  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ .

Решење:

График вагање функције је



Функцију  $f$  проучавамо периодично на  $\mathbb{R}$ . За кородујуће функције  $f$  ће да им имамо дифинисана усавија, па се она може развојити у Фурјејев рег. Као се на симетрији  $[-\pi, \pi]$  обраћају  $f$  посматра са својим проучујућима. Фурјејев рег ће да је Фурјејев развог функције  $f$  на  $[-\pi, \pi]$ . Означавамо гајући Фурјејев рег са  $F$ .

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 dx + \int_0^{\pi} (\pi - x) dx \right) = \frac{1}{\pi} \left( x \Big|_{-\pi}^0 + \left( \pi x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{\pi} \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left( 0 - (-\pi) + \pi^2 - \frac{\pi^2}{2} - \left( 0 - \frac{0^2}{2} \right) \right) = 1 + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 \cos nx dx + \int_0^{\pi} (\pi-x) \cos nx dx \right) = *$$

$$\Gamma \int x \cos nx dx = \begin{cases} u=x & du=dx \\ du=dx & u=\frac{x \pi n}{n} \end{cases} = \frac{x \sin nx}{n} - \frac{1}{n} \int \sin nx dx = \frac{x \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} + C$$

$$* = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^0 + \pi \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \left( \frac{x \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} \right) \Big|_0^{\pi} \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left( 0 - 0 + \pi(0-0) - \left( 0 + \frac{\cos \pi}{n^2} - 0 - \frac{\cos 0}{n^2} \right) \right) = \frac{1}{\pi} \frac{(-1)^n - 1}{n^2}$$

3a  $n=2k, a_n = 0$

3a  $n=2k-1, a_n = \frac{1}{\pi n^2}$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 \sin nx dx + \int_0^{\pi} (\pi-x) \sin nx dx \right) = *$$

$$\Gamma \int x \sin nx dx = \begin{cases} u=x & du=\sin nx dx \\ du=dx & u=-\frac{\cos nx}{\pi n} \end{cases} = -\frac{x \cos nx}{n} + \frac{1}{n} \int \cos nx dx = \frac{x \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} + C$$

$$* = \frac{1}{\pi} \left( -\frac{\cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^0 - \pi \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \left( -\frac{x \cos nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} \right) \Big|_0^{\pi} \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left( -\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n} - \pi \frac{(-1)^n}{n} + \frac{\pi}{n} - \left( -\frac{\pi(-1)^n}{n} + 0 + 0 - 0 \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{\pi(-1)^n + (-1)^n}{n}$$

3a  $n=2k, b_n = \frac{1}{n}$

3a  $n=2k-1, b_n = \frac{\pi - 2}{n\pi}$

Zusammen,

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi} \cos nx + \frac{\pi(-1)^n + (-1)^n}{n\pi} \sin nx \right)$$

$$\text{Ugabge je } F(0) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2n-1)^2}$$

Damit die Funktion f unaufregend g aussehen soll, muß

$$F(0) = \frac{f_+(0) + f_-(0)}{2} = \frac{\pi + 1}{2}$$

Задаче,

$$\frac{\pi+1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$
$$\frac{\pi}{4} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

Додатно :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

2. Урачунати  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .

Решение:

Нека је  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = a$ . Тада је

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{k^2} + \frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{\pi^2}{8}$$

Задаче,

$$a = \frac{1}{4} a + \frac{\pi^2}{8}$$

$$\frac{3}{4} a = \frac{\pi^2}{8}$$

$$a = \frac{\pi^2}{6}$$

Додатно смо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

3. Функцију

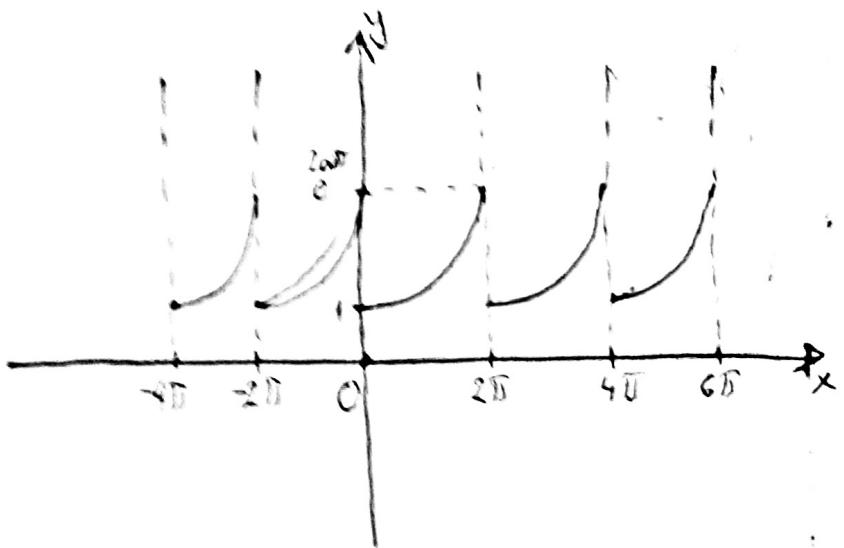
$$f(x) = e^{ax}, a > 0$$

разврати у Фурјеов рег на  $[0, 2\pi]$  и урачунати

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 + n^2}.$$

Решение:

Прогутиштељо функцију  $f$  непрекидна, на  $\mathbb{R}$ .



Приближене функции  $f$  симметрической функции, на  $\mathbb{R}$  с помощью тригонометрических функцій. Тако є фурієві серії функції  $f$  на  $[0, 2\pi]$ , що дозволяє розширити функцію  $f$  на  $[-\pi, \pi]$ . Ось набутено мної тригонометрическое выражение  $f$  на  $[-\pi, \pi]$ .

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad l = \frac{2\pi - 0}{2} = \pi$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{ax} dx = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{e^{ax}}{a} \right]_0^{2\pi} = \frac{e^{2a\pi} - 1}{a\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{ax} \cos nx dx = *$$

$$I = \int e^{ax} \cos nx dx \quad [e^{ax} = u, \cos nx dx = d\theta] = \frac{e^{ax} \sin nx}{n} - \frac{a}{n} \int e^{ax} \sin nx dx =$$

$$[ae^{ax} dx = du, \frac{\sin nx}{n} = \theta]$$

$$\begin{aligned} & \Gamma e^{ax} = u, \sin nx dx = d\theta \\ & = ae^{ax} dx = du, -\frac{\cos nx}{n} = \theta \quad [ ] = \frac{e^{ax} \sin nx}{n} - \frac{a}{n} \left( -e^{ax} \cos nx + \frac{a}{n} \int e^{ax} \cos nx dx \right) = \\ & = \frac{e^{ax} \sin nx}{n} + \frac{ae^{ax} \cos nx}{n^2} - \frac{a^2}{n^2} I \end{aligned}$$

$$I + \frac{a^2}{n^2} I = e^{ax} \frac{n \sin nx + a \cos nx}{n^2}$$

$$\frac{n^2 + a^2}{n^2} I = e^{ax} \frac{n \sin nx + a \cos nx}{n^2}$$

$$I = e^{ax} \frac{n \sin nx + a \cos nx}{n^2 + a^2}$$

$$* = \frac{1}{\pi} \left( e^{ax} \frac{n \sin nx + a \cos nx}{n^2 + a^2} \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi} \left( e^{2a\pi} \frac{a}{n^2 + a^2} - 1 \cdot \frac{a}{n^2 + a^2} \right) = \frac{a}{\pi(n^2 + a^2)} (e^{2a\pi} - 1)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{ax} \sin nx dx = *$$

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \sin nx dx &= \left( I - \frac{e^{ax} \sin nx}{n} \right) \left( -\frac{n}{a} \right) = \left( e^{ax} \frac{\sin nx + n \cos nx}{n^2 + a^2} + e^{ax} \frac{n \cos nx}{n^2 + a^2} \right) \cdot \frac{n}{a} = \\ &= \frac{-n \sin nx - n \cos nx + n^2 \cos nx + n \sin nx}{\pi(n^2 + a^2)} \cdot e^{ax} \cdot \frac{n}{a} = e^{ax} \frac{n \sin nx - n \cos nx}{n^2 + a^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \left( e^{ax} \frac{n \sin nx - n \cos nx}{n^2 + a^2} \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi} \left( e^{2a\pi} \frac{-n}{n^2 + a^2} - 1 \cdot \frac{-n}{n^2 + a^2} \right) = \frac{-n}{\pi(a^2 + a^2)} (e^{2a\pi} - 1) \\ F(x) &= \frac{e^{2a\pi} - 1}{2a\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a}{\pi(n^2 + a^2)} (e^{2a\pi} - 1) \cos nx - \frac{n}{\pi(n^2 + a^2)} (e^{2a\pi} - 1) \sin nx \right) \end{aligned}$$

Угадай же

$$F(0) = \frac{e^{2a\pi} - 1}{2a\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(e^{2a\pi} - 1)}{\pi(n^2 + a^2)}$$

Како упомянутое определение функции f унаследует от 0, то же

$$F(0) = f_+(0) + f_-(0) = \frac{e^{2a\pi} + 1}{2}$$

Задача

$$\frac{e^{2a\pi} + 1}{2} = \frac{e^{2a\pi} - 1}{2a\pi} + \frac{a(e^{2a\pi} - 1)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 + n^2} \quad / \cdot \frac{\pi}{a(e^{2a\pi} - 1)}$$

$$\frac{\pi(e^{2a\pi} + 1)}{2a(e^{2a\pi} - 1)} = \frac{1}{a^2(e^{2a\pi} - 1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 + n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 + n^2} = \frac{a\pi(e^{2a\pi} + 1) - 2}{2a^2(e^{2a\pi} - 1)}$$

4. Функция

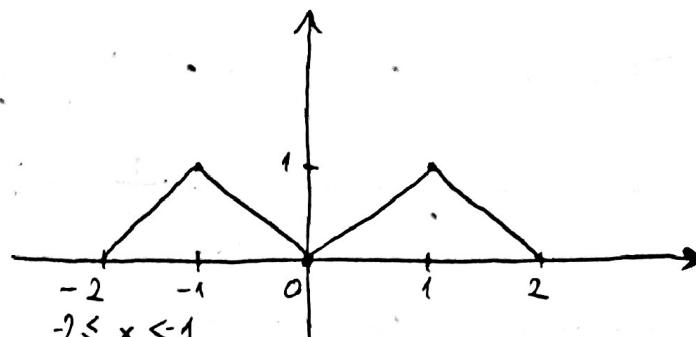
$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

различия в функциях рег. за  $[0, 2]$  то:

- a) косинусина
- d) синусина

Решење:

- a) Функцију  $f$  преди развиши по косинусима, па је мора да је одговарајући  
интервал на  $[-2, 2]$ .



$$g(x) = \begin{cases} 2x, & -2 \leq x < -1 \\ -x, & -1 \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Функцију  $g$  је одговарајући периодично на  $\mathbb{R}$ , и одговарајуће функције  
 $g$  ће задовољавати Дирихлеове услове, па се може развији у

Фурјеов рег. Као што је функција  $g$  посједа са својим  
одговарајућим на  $[-2, 2]$ , добијети Фурјеов рег те јединак-  
ан  $\frac{1}{2}$  разбог функције  $g$  на  $[-2, 2]$ .

Означимо тај Фурјеов рег као  $F$ .

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{2} + b_n \sin \frac{n\pi x}{2} \right)$$

$$a_0 = \frac{2 - (-2)}{2} = 2$$

Као што је функција  $g$  чака, па је  $b_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 g(x) dx = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x dx + \int_1^2 (2-x) dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + \left( 2x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 = \\ &= \frac{1^2}{2} - \frac{0}{2} + \left( 4 - \frac{4}{2} - 2 + \frac{1}{2} \right) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 g(x) \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^2 f(x) \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \\
 &= \int_0^1 x \cos \frac{n\pi x}{2} dx + \int_1^2 (2-x) \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \\
 &= \left( \frac{x \sin \frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}} + \frac{\cos \frac{n\pi x}{2}}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2} \right) \Big|_0^1 + 2 \left[ \frac{x \sin \frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \right]_1^2 - \left( \frac{x \sin \frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}} + \frac{\cos \frac{n\pi x}{2}}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2} \right) \Big|_1^2 = \\
 &= \cancel{\frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}} + \frac{4}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi}{2} - 0 - \frac{4}{n^2\pi^2} \cdot 1 + 0 - \cancel{\frac{4}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}} - \left( 0 + \frac{4}{n^2\pi^2} \cos n\pi - \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi}{2} \right) = \\
 &= \frac{8}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n^2\pi^2} - \frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}
 \end{aligned}$$

3a  $n=4k$ ,  $a_n = 0$

3a  $n=4k+1$ ,  $a_n = 0$

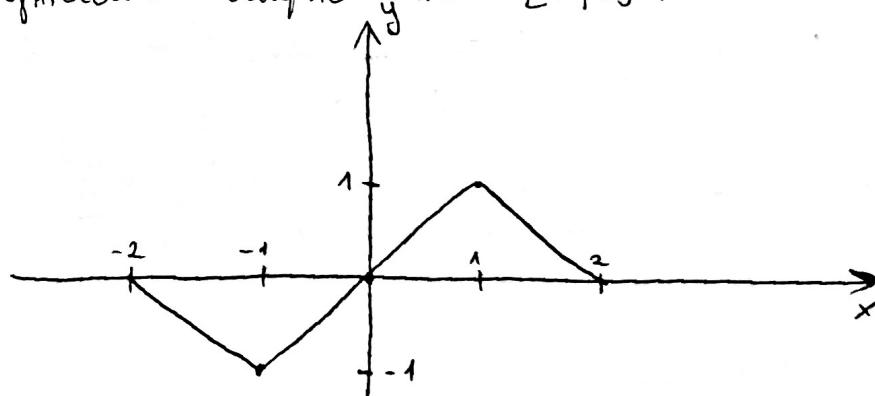
3a  $n=4k+2$ ,  $a_n = -\frac{16}{n^2\pi^2}$

3a  $n=4k+3$ ,  $a_n = 0$

$$F(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{8}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n^2\pi^2} - \frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2} \right) \cos \frac{n\pi x}{2} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-16)}{(4k+3)^2\pi^2} \cos \left( \frac{(4k+3)\pi x}{2} \right)$$

Како се функције  $f$  и  $g$  посматрају на  $[0, 2]$ , ако је у разбој функције  $f$  на  $[0, 2]$ .

d) Функцију  $f$  треба развити до синусама, па је користио простирањи неизвршно на  $[-2, 2]$ .



$$g(x) = \begin{cases} -2-x, & -2 \leq x < -1 \\ x, & -1 \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Функцијата ја претставува периодично на  $R$ . Зададено  
претставување задаваат периодичните услови, па се може  
развивати ја Фурјеовата регуларна функција ја се покажаа са  
својот претставување. на  $[-2, 2]$ , па ќе го дадемо Фурјеовата  
регуларна функција и Фурјеовата разложба функцијата  $f$  на  $[-2, 2]$ .  
Означамо тај Фурјеовата регуларна функција со  $F$ .

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{2} + b_n \sin \frac{n\pi x}{2} \right)$$

$$\ell = \frac{2 - (-2)}{2} = 2$$

Како је  $f$  периодична, т.е.  $a_0 = a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \int_0^2 f(x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \\ &= \int_0^1 x \sin \frac{n\pi x}{2} dx + \int_1^2 (2-x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \\ &= \left. \left( -\frac{x \cos \frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}} + \frac{\sin \frac{n\pi x}{2}}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2} \right) \right|_0^1 + \left. \left( -\frac{\cos \frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \right) \right|_1^2 - \left. \left( \frac{-x \cos \frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}} + \frac{\sin \frac{n\pi x}{2}}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2} \right) \right|_1^2 = \\ &= \left( -\frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} + 0 - 0 \right) + 2 \cdot \left( -\frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{2}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \right) - \\ &\quad - \left( -\frac{4}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + 0 + \frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \right) = \frac{8}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \end{aligned}$$

Зададено  $n=2k$ , т.е.  $b_n = 0$

Зададено  $n=2k-1$ , т.е.  $b_n = \frac{8(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{n^2\pi^2}$

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8(-1)^k}{(2k-1)^2\pi^2} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{2}$$

Како се функцијата  $f$  и  $F$  поклопуваат на  $[0, 2]$ , го дадемо  
Фурјеовата разложба на  $F$  во Фурјеовата разложба на  $f$  на  $[0, 2]$